1.6.3 Sabit Katsayılı Hale Dönüştürülebilen Denklemler

Tanım 3 Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x) \quad \text{---} \quad (19)$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlere **Cauchy-Euler denklemi** denir. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sabitlerdir. Bu denklemler bir bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür.

Teorem 18: (19) ile verilen Cauchy-Euler denklemi, $x>0$, $x=e^t$ (veya $t=\ln x$) değişken değişimi ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.

İspat 3 $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ dönüşümü ile x e göre olan türevleri t ye göre türevler cinsinden ifade edelim:

Türev değişkenini karıştırmamak için

$$D_x = \frac{d}{dx}, \quad D_t = \frac{d}{dt}$$

gösterimlerini kullanalım. Buna göre $t = \ln x$, $x > 0$ için

- $y' = D_x y = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = D_t y \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow x y' = x D_x y = D_t y$

- $y'' = D_x^2 y = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}\right)$

$$= \frac{d^2 y}{dt^2} \underbrace{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}_{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d^2 t}{dx^2}}_{-\frac{1}{x^2}} = D_t^2 y \cdot \frac{1}{x^2} - D_t y \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} D_t (D_t - 1) y$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y'' = x^2 D_x^2 y = D_t (D_t - 1) y$$ olur.

$$\bullet\ y''' = D_x^3 y = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(D_t^3 y - 3D_t^2 y + 2D_t y\right)$$

$$\Rightarrow x^3 y''' = x^3 D_x^3 y = \left(D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t\right) y = (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Genel olarak

$$y^{(n)} = D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left(D_t - (n-1)\right)\left(D_t - (n-2)\right) \cdots (D_t - 1) D_t y$$

olmak üzere

$$x^n y^{(n)} = x^n D_x^n y = (D_t - n+1)(D_t - n+2) \cdots (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Bu ifadeler (19) da yerine yazılırsa

$$\left(a_0 D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - n+1) + a_1 D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - n) + \cdots + a_{n-1} D_t + a_n\right) y = b(\ln t)$$

sabit katsayılı lineer denklemi elde edilir.

Not: $(-\infty, 0)$ aralığındaki çözümü bulmak için $-x = e^t$ dönüşümü yapılır.

Örnek: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemidir.

$x = e^t$, $x > 0$ için $t = \ln x$

$xy' = D_t y$, $x^2y'' = D_t(D_t - 1)y$ olacağından verilen denklem

$$(D_t(D_t - 1) - 2D_t + 2)\, y = (e^t)^3$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - D_t - 2D_t + 2)y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - 3D_t + 2)y = e^{3t} \quad \{\, y'' - 3y' + 2y = e^{3t},\ y = y(t) \,\}$$

şeklinde sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bunun çözümü için

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \text{ den}$$

$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ homojenin çözümüdür. Özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{D_t^2 - 3D_t + 2} e^{3t} = \frac{1}{3^2 - 3.3 + 2} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t}$$ bulunur.

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$ olup $t = \ln x$ için

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3$$ olarak bulunur.

Örnek: $x^2y''' + 5xy'' + 3y' = x\ln x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem bu hali ile Cauchy-Euler denklemi değildir. Denklemin her iki yanı x ile çarpılırsa

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 3xy' = x^2\ln x$$

olup Cauchy-Euler denklemi elde edilir.

$x = e^t,\ x > 0$ dönüşümü ile

$$xy' = D_t y$$

$$x^2y'' = D_t(D_t - 1)y$$

$$x^3y''' = D_t(D_t - 1)(D_t - 2)y$$

olup bunlar denklemde yerine yazılırsa

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + 5D_t(D_t-1) + 3D_t\right)y = e^{2t}\cdot t$$

$$\left(D_t^3 + 2D_t^2\right)y = te^{2t}$$

sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümü:

$$\ell(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0\,,\ \lambda_3=-2$$

için $y_h = c_1+c_2 t+c_3 e^{-2t}$ olur.

$$y_ö=\frac{1}{D_t^3+2D_t^2}\,te^{2t}=e^{2t}\frac{1}{(D_t+2)^3+2(D_t+2)^2}\,t$$

$$=e^{2t}\frac{1}{D_t^3+8D_t^2+20D_t+16}\,t=\frac{e^{2t}}{16}\left\{1-\frac{\cancel{D_t^3}+\cancel{8D_t^2}+20D_t}{16}+\dots\right\}t$$

$$16\left\{1+\frac{D_t^3+8D_t^2+20D_t}{16}\right\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{20}{16}\right\}=\frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{5}{4}\right\}$$

olarak bulunur. Buna göre genel çözüm

$$y=y_h+y_ö=c_1+c_2t+c_3e^{-2t}+\frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{5}{4}\right\}$$

$x=e^t,\ t=\ln x$ için $\quad y=c_1+c_2\ln x+c_3x^{-2}+\dfrac{x^2}{16}\left\{\ln x-\dfrac{5}{4}\right\}$

şeklindedir.

Tanım 8: Her bir terimi $(bx+c)^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı olan

$$a_0 (bx+c)^n y^{(n)} + a_1 (bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (bx+c) y' + a_n y = b(x) \quad (20)$$

tipindeki n. mertebeden denklemlere **Legendre denklemi** denir. Bu denklem $bx+c=u$ dönüşümü ile Cauchy-Euler denklemine dönüşür.

Teorem 19: (20) Legendre denklemi $bx+c=e^t$ dönüşümü ile y bağımlı ve t bağımsız değişkenli sabit katsayılı bir denkleme indirgenerek çözülür.

İspat: $bx+c=e^t \Rightarrow t = \ln(bx+c)$

- $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = D_t y \cdot \dfrac{b}{bx+c} \Rightarrow (bx+c) y' = b D_t y$

- $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{b^2}{(bx+c)^2} (D_t^2 - D_t) y \Rightarrow (bx+c)^2 y'' = b^2 D_t (D_t - 1) y$

$\vdots$

- $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{b^n}{(bx+c)^n} (D_t - n+1)(D_t - n+2) \dots (D_t - 1) D_t y$

$\Rightarrow (bx+c)^n y^{(n)} = b^n D_t (D_t - 1) \dots (D_t - n+1) y$ olup buradan

$$\left(a_0 b^n D_t(D_t-1)\cdots(D_t-n+1) + a_1 b^{n-1} D_t(D_t-1)\cdots(D_t-n+2) + \cdots + a_{n-2} b^2 D_t(D_t-1) + a_{n-1} b D_t + a_n\right) y = b(t)$$

sabit katsayılı denklem elde edilerek çözümü bulunabilir.

Ömek: $(x+2)^3 y''' + (x+2)^2 y'' + (x+2) y' = (x+2)$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklem Legendre denklemi olup $x+2 = e^t$ dönüşümü yapılırsa

$$(x+2)y' = D_t y$$

$$(x+2)^2 y'' = D_t(D_t-1)y$$

$$(x+2)^3 y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

olup bunların denklemde yerlerine yazılmasıyla

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + D_t(D_t-1) + D_t\right) y = e^t$$

$$\Rightarrow \left(D_t^3 - 2D_t^2 + 2D_t\right) y = e^t$$

sabit katsayılı denklem elde edilir.

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1+i, \ \lambda_3 = 1-i$$

için $y_h = c_1 + e^t \{ c_2 \cos t + c_3 \sin t \}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D_t^3 - 2D_t^2 + 2D_t} e^t = \frac{1}{1^3 - 2.1^2 + 2.1} e^t = e^t \quad \text{olur.}$$

Genel çözüm

$$y = y_h + y_ö = c_1 + e^t \{ c_2 \cos t + c_3 \sin t \} + e^t$$

$$= c_1 + (x+2) \{ c_2 \cos(\ln|x+2|) + c_3 \sin(\ln|x+2|) \} + x + 2$$

olarak bulunur.

Uygulama -4-

① $x^3y''' - x^2(x+3)y'' + 2x(x+3)y' - 2(x+3)y = 0$ denklemi verilsin.

ⓐ Bu denklemin x^m, $m \in \mathbb{Z}$ formunda iki lineer bağımsız çözüme sahip olduğunu gösteriniz. ⓑ Bulunan çözümler yardımıyla denklemin mertebesini düşürünüz. ⓒ Genel çözümünü bulunuz.

ⓐ $y = x^m$, $m \in \mathbb{Z}$ çözüm ise

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \quad \text{için}$$

$$\{m(m-1)(m-2) - (x+3)m(m-1) + 2(x+3)m - 2(x+3)\}x^m = 0$$

$$(m-1)(m-2)(m-3-x)x^m = 0$$

$\Rightarrow m=1$, $m=2$ için $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ iki lineer bağımsız çözümdür.

ⓑ $y_1 = x$ için $y = y_1 u = xu$ dönüşümü yapılırsa

$$y' = u + xu', \quad y'' = 2u' + xu'', \quad y''' = 3u'' + xu'''$$

olup denklem

$$x^3(3u''+xu''')-x^2(x+3)(2u'+xu'')+2x(x+3)(u+xu')-2(x+3)xu=0$$

$$\Rightarrow x^4u'''-x^4u''=0$$

$$\Rightarrow u'''-u''=0$$

haline gelir. Burada $u''=v$, $u'''=v'$ denirse bu denklemde

$$v'-v=0$$

şeklinde birinci mertebeden denkleme indirgenir.

$$v'-v=0 \Rightarrow v'=v \Rightarrow \frac{dv}{v}=dx \Rightarrow \ln v = x+c$$

$$\Rightarrow v=c_1e^x \text{ olur.}$$

$$u''=v \Rightarrow u''=c_1e^x$$

$$\Rightarrow u'=c_1e^x+c_2$$

$$\Rightarrow u=c_1e^x+c_2x+c_3 \quad \text{dur.}$$

$y=xu$ olduğundan

$$y=c_1xe^x+c_2x^2+c_3x \quad \text{genel çözümdür.}$$

② $x^3 y''' + xy' - y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemi olduğundan $x = e^t$, $x>0$ dönüşümü yapılırsa

$xy' = D_t y$

$x^3 y''' = D_t(D_t - 1)(D_t - 2)y$ olacağından denklem

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + D_t - 1\right)y = 0 \Rightarrow \left(D_t^3 - 3D_t^2 + 3D_t - 1\right)y = 0$$

şeklinde sabit katsayılı denkleme indirgenir.

$\left(D_t^3 - 3D_t^2 + 3D_t - 1\right)y = 0$

$\Rightarrow (D_t - 1)^3 y = 0$

$\ell(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ için

$y = y_h = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t$

$y = (c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x)\, x$ genel çözümdür.

3 $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemde y bağımlı değişkeni olmadığı için

$y' = u$, $y'' = u'$ dönüşümü ile mertebe düşürülebilir

$(1-x^2)u' - xu = 2 \Rightarrow u' - \dfrac{x}{1-x^2}u = \dfrac{2}{1-x^2}$ birinci

mertebeden lineer denklemdir.

$\lambda(x) = e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \sqrt{1-x^2}$ için lineer denkle-

min genel çözümü

$$\sqrt{1-x^2}\cdot u = \int \frac{2}{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx + c_1$$

$$\sqrt{1-x^2}\,u = 2\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + c_1$$

$$\sqrt{1-x^2}\,u = 2\arcsin x + c_1 \Rightarrow u = (1-x^2)^{-1/2}(2\arcsin x + c_1)$$

bulunur.

$$y' = u = (1-x^2)^{-1/2}(2\arcsin x + c_1)$$

$$\Rightarrow y = 2\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + c_1 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_2$$

$$\Rightarrow y = (\arcsin x)^2 + c_1 \arcsin x + c_2$$

şeklinde çözüm bulunur.

4) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 6(1-x^2)^2$ denkleminin homojen kısmının ikinci dereceden polinomlar şeklinde çözümlerini bularak genel çözümünü bulunuz.

$y_h = ax^2 + bx + c$ şeklinde ise buradan

$y_h' = 2ax + b, \quad y_h'' = 2a$ için

$$(1-x^2)2a + 2x(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) = 0$$

$\Rightarrow \quad 2(a-c) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c$ olup b keyfidir. Böylece

$y_h = ax^2 + bx + c = a(x^2+1) + bx$ olur. Buna göre lineer bağımsız çözümler $y_1 = 1+x^2$, $y_2 = x$ dir. Sabitin değişimi yöntemi ile özel çözümü ararsak

$y_ö = v_1(x)(x^2+1) + v_2(x)\,x$ için

$$\left.\begin{aligned} v_1'(x^2+1) + v_2'\,x &= 0 \\ v_1'.\,2x + v_2' &= 6(1-x^2) \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümünden

$$v_1' = -6x \Rightarrow v_1(x) = -3x^2$$
$$v_2' = 6(x^2+1) \Rightarrow v_2(x) = 2x^3 + 6x$$

olacağından

$$y_ö = -3x^2(x^2+1) + (2x^3+6x)x = -x^4 + 3x^2 \text{ dur.}$$

Genel çözüm

$$y = a(x^2+1) + bx + 3x^2 - x^4$$
$$= a(x^2+1) + bx + 3(x^2+1) - x^4 - 3$$
$$= (a+3)(x^2+1) + bx - x^4 - 3$$
$$= c_1(x^2+1) + c_2x - x^4 - 3$$

şeklindedir.

(5) $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2+4x+1$ denklemini çözünüz.

Denklem Legendre denklemi olup $3x+2 = e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

$$(3x+2)y' = 3D_t y$$

$$(3x+2)y'' = 3^2 D_t(D_t-1)y \qquad \text{olup}$$

$$3x^2+4x+1 = \frac{(3x+2)^2-1}{3}$$

$$\left(9D_t(D_t-1) + 3.3D_t - 36\right)y = \frac{e^{2t}-1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(9D_t^2 - 36\right)y = \frac{e^{2t}-1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(D_t^2-4\right)y = \frac{e^{2t}-1}{27}$$ sabit katsayılı denklemi elde edilir.

Buradan genel çözüm $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{108}\left(te^{2t}+1\right)$

$$y = c_1(3x+2)^2 + c_2(3x+2)^{-2} + \frac{1}{108}\left\{(3x+2)^2 \ln(3x+2) + 1\right\}$$

olarak bulunur.